

LE MELANGE DES CARTES

Sujet étudié par les lycées de Pontcharra et Moirans par : Philippe, Quentin, Kevin, Pagnarit, Marie, Syméon et Aurélie avec l'aide de Mr Perron, Mme Ghesquière, Mr Beltrami, Mme Chambre et Anne Parreau (la chercheuse qui nous a donné notre sujet inspiré recherche de M. Delahaye)

Nous avons étudié une méthode particulière de mélanger les cartes : la méthode pharaon out-faro. On coupe le paquet en deux parties égales, puis l'on intercale une carte sur deux en commençant par celle du bas.



On remarque que lorsqu'on mélange huit cartes avec cette méthode, les cartes reviennent dans leur ordre initial au bout de 3 mélanges.

Est-ce un cas unique ? Le fruit du hasard ? Si non est-il possible de prévoir au bout de combien de mélanges le paquet retrouve sa configuration initiale ? Et pour d'autres types de mélanges ? N'est-ce valable que pour les cartes ?

Nous allons dans un premier temps étudier le cas particulier du mélange pharaon out faro, pour ensuite généraliser à tous les mélanges de cartes et enfin passer en mode 2D en étudiant des transformations d'images.

1) Suivi d'une carte avec la méthode pharaon

Soit x la position d'une carte, y sa position suivante après mélange, N le nombre total de cartes (supposé pair, pour pouvoir faire ce mélange).

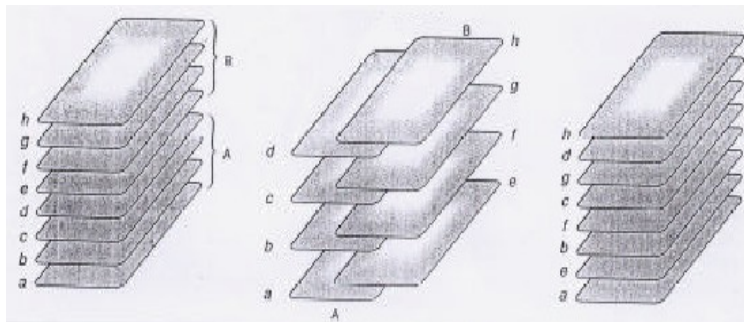
Prenons une carte du paquet A, la première partie du paquet initial.

Lors d'un mélange, des cartes du deuxième paquet viennent s'intercaler entre les cartes du premier, dans les espaces séparant les cartes. Or, avant une carte en position x , on trouve $x-1$ espace(s). *(On le voit bien sur le schéma)*

Donc la nouvelle position d'une carte du premier paquet sera :

$$\begin{aligned} y &= x + (x-1) \\ \Leftrightarrow y &= x + x - 1 \\ \Leftrightarrow y &= 2x - 1 \end{aligned}$$

Prenons à présent une carte du paquet B, la deuxième partie du paquet initial.



Sa position x dans le paquet global peut aussi se noter $(N/2 + x')$, en prenant x' sa position dans le paquet B. Lors d'un mélange, des cartes du deuxième paquet viennent s'intercaler entre les cartes du premier, dans les espaces séparant les cartes. Ainsi, une carte en position x' dans le paquet B ira en position $2x'$ dans le paquet entier. *(On le voit bien sur le schéma)*

$$y = 2x' \quad \text{avec} \quad x = N/2 + x' \Leftrightarrow x' = x - N/2$$

$$\Leftrightarrow y = 2(x - N/2)$$

$$\Leftrightarrow y = 2x - N$$

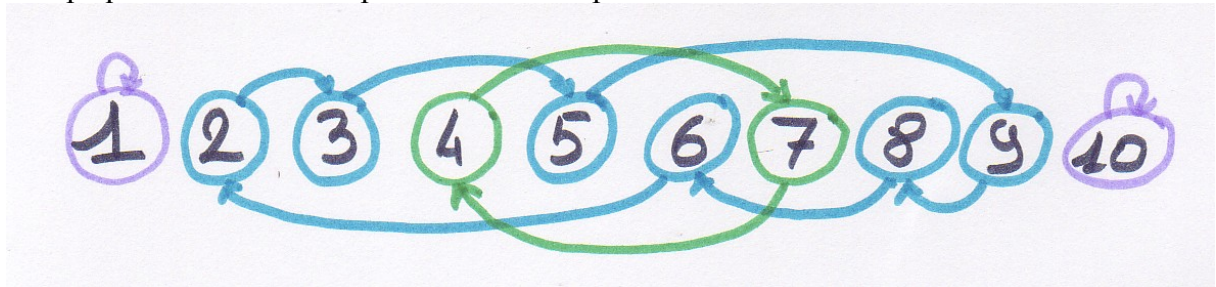
Théorème 1 : Si une carte est en position x , alors sa position suivante sera :

$$y = 2x - 1, \quad \text{si } x \leq N/2$$

$$y = 2x - N, \quad \text{si } x > N/2$$

2) Remarques générales sur le mélange out-faro et conjectures dans le but d'étudier le nombre de mélanges

Pour un paquet de 10 cartes on peut illustrer le déplacement des cartes comme ceci :



Il n'existe pas a priori de formule « clé en main » pour trouver le nombre de mélanges nécessaires pour revenir à la configuration initiale du paquet, quel que soit le nombre de cartes. En tout cas, nous ne l'avons pas trouvée. Mais, grâce à quelques constats, on peut quand même un peu simplifier la tâche :

- **Symétrie du paquet** : Lorsqu'on effectue le mélange « out faro », on peut constater que

les cartes se déplacent symétriquement. En effet, que l'on considère que la première carte est celle du dessus ou celle du dessous du paquet (c'est à dire si on inverse la numérotation, ce qui revient à remplacer x par $N-x+1$), cela n'a pas d'importance, et les formules restent exactement les mêmes.

Par exemple, la carte en position 2 ira ensuite en position 3, et l'avant dernière carte en position $N-1$, ira en position $N-2$.

Ainsi, étudier le mouvement des cartes d'une seule moitié suffit, l'autre moitié évoluant de la même manière.

- **Parité des positions** : On peut constater que toutes les cartes du paquet du dessus arriveront dans une position paire. Et celles du paquet du dessous arriveront dans une position impaire. Cela peut être facilement expliqué par la formule utilisée pour connaître les positions successives des cartes :

✗ Pour la première moitié : la carte en position x , quelle que soit sa parité, ira en position $y = 2x - 1$. Or, $2x$ est pair, car multiple de 2, et si on retire 1 à un nombre pair, on obtient un impair. Donc y est impair.

✗ Pour la deuxième moitié : la carte en position x , quelle que soit sa parité, ira en position $y = 2x - N$. Ici aussi, $2x$ est pair, et N (nombre de cartes dans le paquet) est pair (*présupposé initial, sinon on ne peut point couper le paquet en deux parties égales*). Donc y est pair également.

● Etudier le mouvement d'une carte C revient à étudier le mouvement de toutes les cartes occupant les emplacements occupés par C au fur et à mesure des mélanges. Donc il est inutile d'étudier le mouvement de toutes ces cartes.

● De plus, par définition, la première carte et la dernière du paquet ne se déplacent pas. Il est donc inutile d'étudier leurs déplacements.

En outre, avec nos formules, nous voyons bien qu'elles ne bougent pas :

Première carte (1) : $y = 2*1 - 1 = 2 - 1 = 1$

Dernière carte (N) : $y = 2*N - N = 2N - N = N$

Ainsi, grâce à ces petites astuces, pour étudier un paquet de 10 cartes par exemple, on doit seulement étudier la carte 2 (qui passera en 3, 5, 9, 8, 6, pour revenir ensuite en 2^{ème} place). Puis la carte 4, qui ira seulement en 7^{ème} place avant de revenir à la 4^{ème}. Etudier seulement 2 cartes a permis de connaître les mouvements de toutes les cartes d'un paquet de 10 cartes.

● Nous avons aussi remarqué et démontré que, lorsque l'on a un nombre de cartes égal à 2^k cartes, alors il faudra k mélanges pour que le paquet retrouve sa configuration initiale.

Pour 8 cartes, 3 mélanges suffisent.

Pour 32 cartes, jeu de poker, 5 suffisent.

Théorème 2: Si le nombre de cartes $N = 2^k$, alors le paquet retrouve sa configuration initiale au bout de $M = k$ mélanges.

(Démonstration avec des congruences et raisonnement par récurrence en annexe)

● Au cours de nos travaux sur le mélange du pharaon, nous avons repéré un élément qui nous permet de trouver plus rapidement le nombre de mélanges minimum à effectuer avant que notre paquet de cartes retrouve sa configuration initiale. On a remarqué que la 2^{ème} carte du paquet (initial) ne reprenait sa place qu'au bout du nombre M de mélanges (temps de retour à la configuration initiale).

Cela signifie de toute évidence que pour trouver le nombre de mélanges à faire afin de retrouver le paquet dans sa configuration initiale, il suffit de suivre la carte N°2, et de connaître le nombre de mélanges k_2 qu'elle fera avant de revenir à la 2^{ème} position du paquet.

Malgré nos acharnements, nous ne sommes pas arrivés à bout de cette étrangeté. Nous savons que cette conjecture est vraie, nous en avons trouvé une confirmation sur Internet (d'après Delahaye).

Conjecture 1 : Le paquet retrouve sa configuration initiale si et seulement si la deuxième carte du paquet revient à sa position initiale, position 2.
C'est-à-dire : $M = k_2$.

Pour le mélange « out faro », si on s'appuie sur cette conjecture de la 2^{ème}, on remarque que l'on n'excède jamais $N-2$ mélanges pour retrouver la configuration initiale du paquet.

Pourquoi ?

Parce que la carte 2 mettra maximum N mélanges pour revenir (cf. démonstration 3 ci-dessous). Or, les cartes 1 et N sont immobiles, donc cela fait 2 places en moins susceptibles d'être occupées par la carte 2, donc deux mélanges en moins avant son retour (d'où le $N-2$). Or, suivant la conjecture 1 ci-dessus, lorsque la 2^{ème} carte revient à sa place, le paquet revient aussi à l'initiale, donc au bout de maximum $N-2$ mélanges !

Cette conjecture nous a permis de faire un programme pour nos calculatrices qui nous donne le nombre M de mélanges nécessaires en fonction du nombre N de cartes. (pour le programme voir en annexe)

- 3) **Cas général** (valable pour tout type de mélange de cartes du moment que l'on effectue toujours le même mouvement : mélange non aléatoire, répétitif)

Nous cherchons à déterminer si un paquet de N cartes retrouvera ou non sa configuration initiale, au bout d'un certain nombre M de mélanges.

Lemme 3 : Une carte x revient toujours à sa position initiale au bout de k_x mélanges.

Démonstration 3 :

Raisonnons par l'absurde.

Nous allons supposer qu'une carte x ne revienne jamais à sa position initiale.

Comme il y a un nombre fini N de cartes, la carte x reviendra à une autre position P qu'elle a déjà occupée auparavant, et ce au bout de maximum N mélanges. Appelons cet instant I .

Or, la position P' qui avait déjà une première fois mené la carte x à la position P , amène à l'instant I une nouvelle carte y en position P .

Deux cartes se retrouveraient alors à la même position en même temps.

Mais ceci est impossible, donc la supposition initiale est fausse.

Conclusion : Une carte x revient toujours à sa position initiale au bout de k_x mélanges où $k_x \leq N$.

Théorème 4 : Il existe un nombre M de mélanges au bout duquel toutes les cartes auront retrouvé en même temps leur configuration initiale pour la première fois.

Démonstration 4 :

Chaque carte i du paquet retrouvera sa position initiale au bout d'un certain nombre k_i de mélanges. (cf. le lemme ci-dessus)

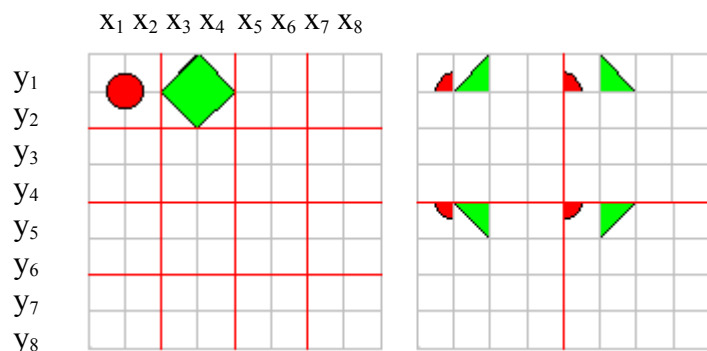
Il existe donc forcément un multiple commun à tous ces mélanges, au bout duquel toutes les cartes auront repris leur position initiale en même temps.

Ainsi, M est le PPCM de tous les k_i mélanges que met chaque carte pour retourner à sa position initiale.

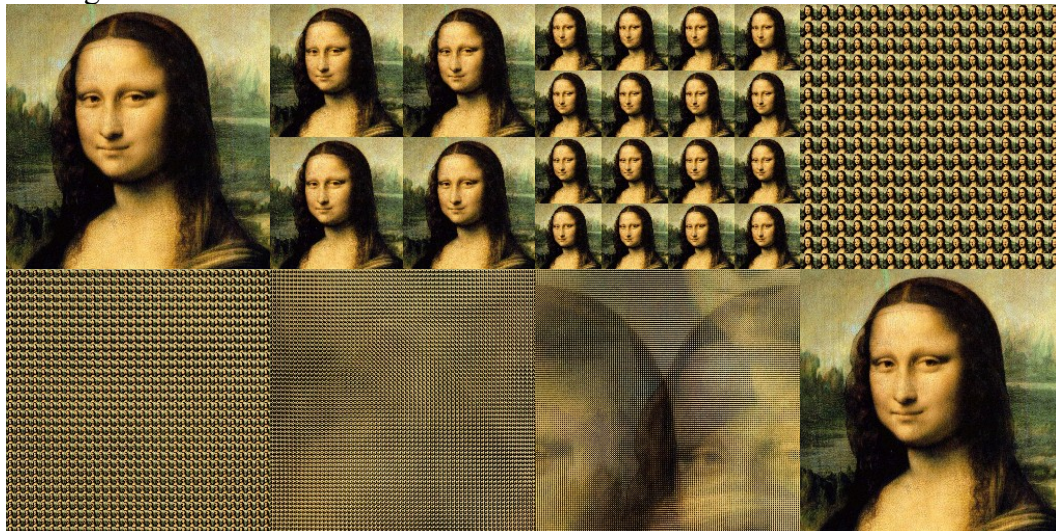
Conclusion : Tout paquet, aussi grand soit-il, retrouvera forcément sa configuration initiale au bout d'un certain moment si on le mélange toujours de la même manière.

4) Transformations d'images (photomaton)

Une transformation d'images peut être identifiée à un mélange de pixels. Nous avons étudié une transformation particulière : le photomaton. L'image initiale est divisée en carrés de 2×2 pixels. Ces carrés de 4 pixels sont éclatés et répartis dans l'image intermédiaire divisée en quatre de la façon illustrée par le schéma.



Voici un exemple avec une image de 256×256 pixels : on retrouve l'ordre initial au bout de 8 mélanges.



Pour télécharger le programme qui effectue la transformation photomaton [Cliquez ici](#)

4.1) suivi d'un pixel

Pour un peu plus de simplicité chaque pixel est associé à un couple de coordonnées (x, y) . Le pixel aura retrouvé sa place initiale lorsque ses coordonnées (x', y') seront les mêmes que lors de la configuration initiale de l'image.

Pour étudier le mouvement d'un pixel il faut étudier indépendamment son abscisse et son ordonnée.

Pour les abscisses :

Théorème 5 : si x est impaire alors $x'=(x+1)/2$ (avec x' la position après brassage)

Démonstration 5 : Le nombre de pixels ayant la même ordonnée précédant x est $x-1$. Le nombre de pixels précédant x et ayant une abscisse e paire est $(x-1)/2$. Lors du brassage on retire à x le nombre de pixels d'abscisse paire qui le précède.

$$\begin{aligned}x' &= x-(x-1)/2 \\ &= (x+1)/2\end{aligned}$$

Théorème 6 : si x est paire alors $x'=(x+n)/2$

Démonstration 6 : Le nombre de pixels ayant la même ordonnée suivant x est $n-x$. Le nombre de pixels d'abscisse impaire suivant x est $(n-x)/2$. Lors du brassage on ajoute à x les pixels d'abscisse impaire qui le suivent :

$$x' = x+(n-x)/2=(x+n)/2$$

Il suffit maintenant de raisonner de la même façon avec les ordonnées

Théorème 7 : Si y est impaire alors $y'=(y+1)/2$

Théorème 8 : Si y est paire alors $y'=(y+n)/2$

Exemples(en rapport avec le dessin) :

Le pixel de coordonnées (1 ;3) a une abscisse et une ordonnée impaires.

$$x' = (x+1)/2 \Leftrightarrow x'=(1+1)/2 \Leftrightarrow x' =1$$

$$y'=(y+1)/2 \Leftrightarrow y'=(3+1)/2 \Leftrightarrow y'=2$$

Ce pixel prend donc pour coordonnées (1 ;2) après le brassage

Le pixel de coordonnées (4 ;2) a une abscisse et une ordonnée paire

$$x'=(x+n)/2 \Leftrightarrow x'=(4+8)/2 \Leftrightarrow x'=6$$

$$y'=(y+n)/2 \Leftrightarrow y'=(2+8)/2 \Leftrightarrow y'=5$$

Il prend donc pour coordonnées (6 ;5) après le brassage

4.2) Reconstruction de l'image

Acquis : Mélange de carte

Toutes les cartes reviennent en même temps à leur position initiale pour la première fois au bout d'un nombre M de mélanges correspondant au PPCM des nombres k_i de brassage correspondant à chaque carte. k_i étant le numéro du premier brassage où une carte revient à sa position initiale.

Remarque : les pixels d'une même ligne restent toujours ensemble sur une autre ligne mais dans un ordre différent. Ce qui se traduit sur les formules par le fait que la nouvelle position x' d'un pixel ne dépend pas de son ordonnée mais uniquement de son abscisse.

De même, ceux d'une même colonne y restent toujours ensemble sur une autre colonne mais dans un ordre différent.

De la même façon que pour les cartes les pixels d'une même ligne reviennent ensemble à leur place initiale pour la première fois au bout d'un nombre m_x de brassage tel que :

$m_x = \text{PPCM des } k_x$ (numéro du premier brassage où le pixel d'abscisse x revient à sa position initiale sur la ligne) de chaque pixels de la ligne.

Et les pixels d'une colonne reviennent ensemble à leur place initiale pour la première fois au bout d'un nombre m_y de brassages tel que :

$m_y = \text{PPCM des } k_y$ (numéro du premier brassage où le pixel d'ordonnée y revient à sa position initiale sur la colonne) de chaque pixel de la colonne.

L'image revient donc dans sa configuration initiale lorsque les lignes et les colonnes sont en place en même temps.

La première fois que l'image est reconstituée correspond au nombre M de brassage tel que :

$$M = \text{PPCM} (m_x ; m_y).$$

5) Conclusion sous forme de question/réponse

Q : Si on fait sans arrêt le même mélange, les cartes reviennent forcément dans leur configuration initiale ?

R : Effectivement, tout simplement parce qu'il y a un nombre limité de positions.

Q : Tout ça ne marche qu'avec le mélange Pharaon ?

R : Tout dépend du « ça ». Notre propriété principale, sur le retour à la configuration initiale, est valable pour tous les mélanges, quel que soit le type ou le support (cf. mélanges d'images). Par contre nos formules ne sont utilisables que pour ce mélange particulier.

Q : Pourquoi « out faro » ?

R : Out, car les première et dernière cartes restent à « l'extérieur » du paquet. Faro, cela est sûrement une contraction de l'anglais « pharaoh » qui comme vous l'aurez deviné signifie Pharaon.

Q : Vous a-t-on aidé ? Quel est votre niveau ?

R : Nous sommes un groupe hétérogène, avec des 2^{ndes}, 1^{ères} et Terminales. Nous avons tout réalisé seuls, même si l'on a été un tout petit peu guidés au début pour savoir quoi chercher.

Q : Vos démonstrations et théorèmes sont simples.

R : Nous avions en tête d'utiliser des suites, de la récurrence, et des congruences de façon prononcée, mais finalement nous avons abandonné pour la simplicité et la compréhension générale.

Q : Combien de temps cela vous a-t-il pris pour trouver ça ?

R : Bah, cela n'a pas été très long ni fastidieux... Nous avons quand même pris notre temps, mais le plus dur a été de tout rédiger afin que ce soit explicite pour tous.

Q : Si j'ai bien compris vos démonstrations fonctionnent aussi bien pour du linéaire que pour de la 2D, qu'en est-il de la 3D ?

R : Ça marche de la même façon sauf qu'au lieu que M soit le PPCM (m_x ; m_y) il sera le PPCM (m_x ; m_y ; m_z) où m_z est le PPCM des k_i de chaque pixel de la profondeur.

Q : Alors ? Peut-on tricher aux cartes ?

R : En étant très doué pour les mélanges, oui. Remarquez que c'est ce mélange Pharaon qui est le plus souvent utilisé par les prestidigitateurs ou les cartomanes modernes. Ce n'est pas pour rien, nous venons de vous en dévoiler une des raisons.

6) Annexes

6-1) Démonstration du théorème 2

Si le nombre de cartes $N=2^k$, on revient à l'ordre initial au bout de k mélanges

On a nécessairement $0 < x < N$

Si $x \leq \frac{N}{2} \Rightarrow y = 2x - 1$

Et si $x > \frac{N}{2}$, alors $y = 2x - N \equiv 2x - 1[N - 1]$

Notons P_n la proposition : $k_k = 2^k(x - 1) + 1[N - 1]$

Pour $n=0$

$$2^0(x_0 - 1) + 1[N - 1]$$

$$\equiv (x_0 - 1) + 1[N - 1]$$

$$\equiv x_0[N - 1]$$

$$\equiv y_0[N - 1]$$

Soit i un réel tel que $y_i \equiv 2^i(x_0 - 1) + 1[N - 1]$

On a alors $y_{i+1} \equiv 2y_i - 1[N - 1]$

$$\equiv 2(2^i(x_0 - 1) + 1) - 1[N - 1]$$

$$\equiv 2 * 2^i(x_0 - 1) + 1[N - 1]$$

$$\equiv 2^{i+1}(x_0 - 1) + 1[N - 1]$$

Pour $n=0$ P est vraie

Si $P(k)$ alors $P(k+1)$ vrai

Donc par récurrence P est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$

On va maintenant démontrer que si $N = 2^k$, alors $y_k = x_0$ Il suffit de calculer :

$$y_k \equiv 2^k(x_0 - 1) + 1[2^k - 1]$$

$$y_k \equiv (2^k - 1)(x_0 - 1) + (x_0 - 1) + 1[2^k - 1]$$

$$y_k \equiv (2^k - 1)(x_0 - 1) + x_0[2^k - 1]$$

$$y_k \equiv x_0[2^k - 1]$$

Ainsi $y_k = x_0$ pour $N = 2^k$, ce qui signifie que pour 2^k cartes la position d'une carte quelconque après k brassages est la même que sa position initiale.

6-2) Programme pour calculatrice

C'est un programme de simulation du mélange de cartes out faro pour calculatrices Texas Instrument

Dans tous le programme :

N est le nombre de cartes

X est la position de la carte numéro 2 avant brassage

Y est la position de la carte numéro 2 après brassage

K est le nombre de brassages effectués

```
: 0→K          effacer toute valeur de K qui serait enregistrée
: 0→Y          effacer toute valeur de Y qui serait enregistrée
: 2→X          X=2
: Prompt N      demander de rentrer une valeur de N
: Lbl 1
: If Y=2        Si Y=2 (la carte numéro 2 a alors retrouvé sa position initiale)
: Then         alors
: Disp K       afficher K
: Stop        fin du programme
: Else        sinon
: K+1→K       K+1=K (on ajoute un brassage)
: If fPart(X/2)=0 si la partie décimale de X/2 est nulle (si X est pair)
: Then        alors
: X+(N-X)/2→Y Y=X+(N-X)/2
: Y→X Y=X (la nouvelle valeur de X est Y pour pouvoir exécuter un nouveau brassage)
: Goto 1      retour à Lbl 1
: Else        sinon (si X est impaire)
: (X+1)/2→Y   Y=(X+1)/2
: Y→X        Y=X (la nouvelle valeur de X est Y pour pouvoir exécuter un nouveau
              brassage)
: Goto 1      retour à Lbl 1
```

Informations pratiques pour les personnes non habituées à la programmation sur calculatrice (valables pour les Ti82 STATS au moins...) :

- La flèche s'obtient avec la touche STO.

- Les mots « If », « Then », « Else », « Lbl », « Goto », et « Stop » s'obtiennent en appuyant la touche PRGM puis en faisant défiler les différentes possibilités avec les touches fléchées jusqu'au mot choisi puis en appuyant sur ENTER pour sélectionner le mot.
- Les mots « Prompt » et « Disp » s'obtiennent en appuyant la touche PRGM puis la touche fléchée à droite puis en agissant comme pour les mots ci dessus
- Le signe = est dans TEST (2nd puis MATH)
- « fPart(» dans MATH
- les lettres avec ALPHA suivi de la lettre désirée...